EL *LLIBRE DE GEOMETRIA* D'ABRAHAM BAR HIYYA EN L'ENSENYAMENT DE LA MATEMÀTICA

Josep M. Núñez Espallargas i Jordi Servat Susagne
Universitat de Barcelona.

Paraules clau: *Abraham bar Hiyya*, *història de la geometria*, *ensenyament de la matemàtica.*

The *Llibre de geometria* of Abraham bar Hiyya in the mathematical education

Summary: *In this work some of the questions that appear in* Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret, *geometric text written in the first third of the XII Century by the catalan jew Abraham bar Hiyya are commented and that we consider of didactic usefulness for the basic education of geometry.*

Key words: *Abraham bar Hiyya*, *history of geometry*, *mathematical education.*

Quan s'aborda l'ensenyament de la geometria en l'àmbit de la formació de professors orientats a la instrucció primària o secundària obligatòria, a l'aula se sol tractar de quina manera s'ha de conèixer i practicar les tècniques de la geometria euclidiana. Amb això es pretén, a més d'ensinistrar els futurs docents en els mètodes i recursos d'aquesta antiga branca de les matemàtiques, ajudar-los a comprendre i valorar millor els avantatges que va suposar la incorporació de l'àlgebra en el desenvolupament posterior de la geometria. Per aconseguir aquest propòsit ens resulta de gran utilitat didàctica la presentació a l'aula de fragments, exemples o problemes històrics extrets d'obres clàssiques de la matemàtica o d'altres branques de la ciència o de la tècnica. D'aquesta manera, aconseguim de l'alumne, a més de la pràctica dels mètodes apresos i del coneixement de primera mà de les principals etapes de l'evolució de la matemàtica, la motivació pel tema estudiat, proposant-li una situació inserida dins d'un context històric real, que facilita un ensenyament globalitzat de la matemàtica i posa de manifest la seva utilitat social.

Des de fa ja algun temps, hem anat recollint, de fonts molt diverses, material que creiem apropiat per a aquest objectiu. Un dels textos que ens està resultant més suggeridor i útil és el llibre titulat, en la seva llengua original, l'hebreu, *Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret*. Exposarem aquí algunes dades bàsiques sobre el seu autor, el text de l'edició que utilitzem, i després comentarem molt breument alguns dels capítols o fragments del text que ofereixen, segons el nostre parer, un major interès per a l'ensenyament de la geometria.

El seu autor, Abraham bar Hiyya, va ser un notable matemàtic i erudit jueu sefardita de qui tenim molt poques notícies. La seva data de naixença se sol situar entre els anys 1065 i 1070, i la de la seva mort el 1136. No sabem el lloc exacte on va veure la llum, ni tampoc on van ser els seus anys d'aprenentatge, però pels seus coneixements de la matemàtica i de l'astronomia àrabs, aquests només van poder desenvolupar-se en alguna ciutat peninsular de l'àrea de domini musulmà que fos un centre cultural actiu. Tenim documentada la seva estada a la cort del rei aragonès Alfons I, i el seu posterior pas al servei dels comtes de Barcelona. En aquesta ciutat va transcórrer la major part de la seva vida activa i va ser on va escriure les seves obres més conegudes. Va ocupar el càrrec públic de Savasorda, llatinització del terme àrab *sahib-al-shurta*, i el sobrenom amb què va ser conegut en terres cristianes (Bensch, 2002).

A més de l'obra que ens ocupa, Abraham bar Hiyya en va escriure, també, altres de caràcter científic. Citem el text astronòmic *Sefer ha-Ibbur*, que va constituir el primer llibre en llengua hebrea dedicat exclusivament a l'estudi del calendari; o l'extensa enciclopèdia de matemàtiques, música, astronomia, etc., *Yesod ha-Tebunah we-Migdal ha-Emunah*, també la primera en aquest idioma. El nostre autor, juntament amb un altre sefardita, Abraham ibn Ezra, va ser l'iniciador dels estudis escolars de matemàtiques en llengua hebrea. Fins a aquest moment els nens jueus duien a terme el seu aprenentatge llegint bàsicament la Bíblia i estudiant el Talmud, que ofereix un conjunt de sabers al voltant de l'exegesi bíblica que comprèn no només coneixements religiosos o teològics, sinó també d'altres d'índole molt diferent, incloent-hi fins i tot la matemàtica aplicada (Lévy, 2001). Precisament la proposta d'Abraham bar Hiyya i d'Abraham ibn Ezra va en el sentit de fonamentar científicament aquests sabers matemàtics empírics per evitar errors greus en la seva aplicació pràctica. Per a això, recorren a les versions de les obres clàssiques de la matemàtica grega portades a terme pels savis àrabs, així com a les millores que aquests introdueixen. Però no hem d'intuir, després d'aquestes propostes innovadores d'Abraham bar Hiyya, una actitud heterodoxa respecte a la religió, tot al contrari, el seu propòsit és conciliar el saber matemàtic amb la revelació divina, de manera que aquesta preval sempre en tot moment. En aquest sentit, hem de recordar que també va ser un notable autor d'obres filosòfiques i teològiques, com ara l'*Hegyon ha-Nefesh ha-Azuva*, estudi sobre la naturalesa del bé i del mal, o la cèlebre *Megillat ha-Megalleh*, que recull la història del poble jueu des de la revelació i que va ser un referent per als rabins dels segles posteriors (Ashtor, 1984).

Es desconeix la data exacta en què va ser escrit l'*Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret*, però probablement podríem situar la seva redacció al voltant de la segona dècada del segle XII. En canvi, es coneix millor la data en què va ser realitzada la traducció al llatí, portada a terme per Plató de Tívoli, el fundador d'una dinastia de traductors jueus, que tant van contribuir, a través de les seves versions en hebreu, a la difusió del llegat científic àrab en l'Europa cristiana. Aquesta traducció, una mica abreujada, va ser coneguda pel seu títol llatí *Liber Embadorum*. Va veure la llum el 1145 i va constituir un dels primers llibres d'àlgebra escrits en llatí i, juntament amb la versió de l'àlgebra d'Al-Khawarizmi de Roberto de Chester, apareguda també en el mateix any, les dues primeres obres que mostraven en llatí el procediment per determinar la solució general de l'equació de segon grau (Glick, 1979).

En diverses biblioteques i arxius europeus es conserven còpies manuscrites de l'*Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret*, però ofereixen diferències segons quins fossin els coneixements o les habilitats dels copistes. Comparant les versions existents, Guttmann va publicar al començament del segle XX una edició crítica de l'*Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret* que és considerada per tots els estudiosos la versió de referència. Afortunadament, el lector català disposa d'una magnífica traducció realitzada per Millàs i Vallicrosa en els anys trenta per a la Biblioteca Hebraico-Catalana (Bar-Hiia, 1931). L'existència d'aquesta traducció fa més viable als professors la utilització de fragments d'aquesta obra amb finalitats didàctiques, si, com ens ocorre a nosaltres, els agrada acudir als textos originals o, en cas d'estar aquests escrits en una llengua no familiar per a la majoria dels alumnes, com és el cas, a traduccions fiables. És important assenyalar que, encara que Millàs tradueix el títol de l'obra amb l'expressió genèrica *Llibre de geometria*, una versió més literal del títol original ens expressa molt millor l'objecte i el caràcter de l'obra. Aquesta podria ser, com el mateix traductor també assenyala en la seva introducció, *Tractat de mesurament i de càlcul*. D'aquesta manera, es recalca el to eminentment pràctic i didàctic que té el text, ja que es tracta d'una guia per a les persones encarregades de mesurar i fer càlculs de valoració i repartiment de terres per a herències, compravendes, arrendaments, etc.

Considerarem ara molt breument alguns aspectes o qüestions tractades en l'*Hibbur ha-Meshihah we-ha-Tishboret* que són d'utilitat en les nostres classes. Seguirem per a això, aproximadament, l'ordre que ens ve donat per la mateixa estructura de l'obra en quatre parts o capítols.

Comencem per dir que, encara que en la traducció no és perceptible, ja que s'utilitza sempre el sistema indoaràbic, en el text original el seu autor per designar les quantitats empra els numerals hebreus, que són les mateixes lletres del seu alfabet utilitzades amb valor numèric. Aquest fet, que dificulta al traductor la identificació de les quantitats en els manuscrits, presentat als alumnes, propicia la introducció i el comentari didàctic d'aquest sistema, i també el d'altres sistemes de numeració històrics de tipus xifrat.

Una característica general de l'obra que vam trobar ja en el primer capítol, dedicat a la descripció dels elements generals de la geometria, a la classificació dels polígons i a la proporcionalitat, és l'absència total de simbologia algebraica. Pot sorprendre'ns que Abraham bar Hiyya, bon coneixedor dels textos àrabs, no utilitzés aquest notable avenç, però suposem que no ho va fer per, almenys, dues raons. La primera, per la mateixa índole de l'obra que no anava adreçada als estudiosos, sinó a artesans, la qual cosa exigia una exposició de les qüestions assequible al públic lector, poc familiaritzat amb els textos de caràcter matemàtic. La segona es desprèn de la confusió que s'hauria pogut crear en escriure en llengua hebrea lletres per designar valors genèrics, quan aquestes mateixes lletres també signifiquen nombres concrets.

En el segon capítol, dedicat a la determinació de l'àrea de les principals figures planes, l'autor, per aconseguir aquest propòsit, i d'altres que es veuran més endavant, ha de demostrar abans sis teoremes. Alguns d'aquests teoremes en l'àmbit escolar actual es presenten habitualment en forma algebraica, però en el text els raonaments prescindeixen d'aquest mitjà utilitzant únicament l'aritmètica i la geometria. És molt il·lustratiu per als nostres alumnes poder comparar ambdues perspectives, l'aritmeticogeomètrica i l'algebraica i fer una anàlisi dels processos implicats en les respectives demostracions. D'aquesta manera es pot il·lustrar didàcticament, a través de l'exemple històric, el pas de l'aritmètica a l'àlgebra. L'esquema és el següent: en primer lloc, es descriu la situació matemàtica en absència de notació literal, després es passa a la concreció de la situació mitjançant un exemple numèric, i finalment s'arriba a una demostració general per mitjans exclusivament geomètrics. Vegeu un parell de situacions:

— El quadrat d'un binomi (p. 17): «Tota recta que es divideixi en dues parts, el seu quadrat és igual a la suma dels quadrats de les dues parts més el doble del producte de la primera part per la segona». Primer es fa una comprovació de la igualtat a partir d'un raonament aritmètic: «Si la recta fa 12 colzes i la de les dues parts en què l'hem dividida: 7 i 5 colzes, el quadrat de la recta és 144, i aquest nombre és igual a la suma dels quadrats de 7 i 5, 49 i 25, o sigui 74, més el doble del producte de les dues parts, o sigui 70». Després es fa una demostració geomètrica a partir de dividir un segment AB en dues parts AE i EB, de manera que podem construir geomètricament un quadrat de costat AB i en el seu interior construir dos quadrats de costats AE i EB i dos rectangles de costats AE i EB, cadascun (figura 1).

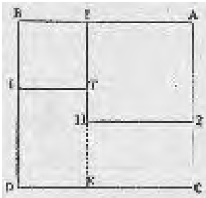

FIGURA 1. Construcció geomètrica.

— Sobre les divisions d'un segment en parts iguals i desiguals (p. 18): «En tota recta dividida en dues parts iguals i en altres dues desiguals, la suma del producte de les dues parts desiguals més el quadrat de la diferència que hi ha entre la part major i la part igual és igual al quadrat de la part igual». Comença per la comprovació aritmètica: «Així una recta que tingui 12 colzes, si la dividim en dues parts iguals de 6 colzes i en altres dues de 8 i 4 colzes, tindrem que el producte 8 per 4 sumat amb el quadrat de la diferència entre 8 i 6 o sigui 4, és 36, i això és igual al quadrat de la part igual a 6». A continuació, desenvolupa una demostració a partir de la construcció geomètrica de la igualtat algebraica:

$$AE \times EB + (AE - (AE + EB)/2)^2 = ((AE + EB)/2)^2$$

A partir d'un segment AB dividit en dues parts iguals, AT i TB; dues parts desiguals, AE i EB, sent AE > EB, podem construir geomètricament el rectangle de dimensions AE i EU, sent EU = EB i el rectangle AEIC, de manera que UI = ET (figura 2). D'aquesta manera, el producte AE $\times$ EB és l'àrea del rectangle AEUZ, i sumant el quadrat HUID, de manera que ens donarà el mateix que el quadrat ATDC, ja que TEID = SHCD.

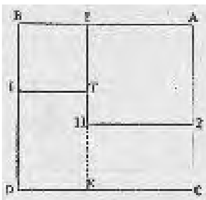

FIGURA 2. Construcció geomètrica.

Aquests teoremes són el pas previ al plantejament del procés resolutiu estrictament geomètric de les equacions de segon grau, que, com ja hem indicat abans, constitueix una de les novetats que aporta l'obra. En aquest sentit, una activitat didàctica que ens ha resultat altament fructífera ha estat la visualització d'aquest llenguatge geomètric mitjançant la utilització de programes informàtics, com el Cabri II, que permeten a l'alumne seguir i reconstruir perfectament els passos o les etapes de tot el procés (Servat, Núñez, 2000).

En el mateix segon capítol, trobem una altra qüestió que mereix la nostra atenció com a professors. Es tracta del procés de càlcul aproximatiu de l'àrea del cercle, que pel que sembla va inventar Abraham bar Hiyya, encara que, com suggereix Millàs, va poder inspirar-se en la tècnica de la descomposició practicada per alguns comentaristes del Talmud, com els tosafistes. Sigui o no el seu descobridor, la veritat és que difereix dels procediments desenvolupats pels grecs i, per això mateix, suposa una alternativa metodològica molt suggeridora per ser plantejada, també, a l'aula. Esquemàticament el procés és el següent:

— Demostra la fórmula de l'àrea del cercle de radi r a partir de la partició d'aquest en un conjunt de cercles concèntrics de manera que, una vegada que s'han estès en forma horitzontal i col·locat els uns sobre els altres, s'obté una figura triangular en què la base és la longitud del cercle, és a dir $2\pi r$, i la seva altura el radi r. D'aquesta construcció, s'obté que el cercle i la figura triangular tenen ambdós la mateixa àrea, πr^2 (figures 3 i 4).

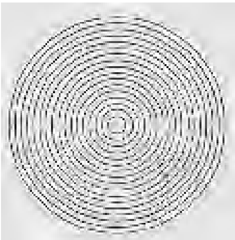

FIGURA 3. Cercle.

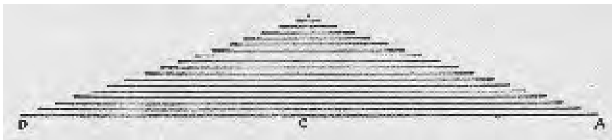

FIGURA 4. Figura triangular.

En l'ensenyament de la geometria, la partició proporcional de superfícies és una qüestió poc tractada i de la qual no abunden exemples o problemes en les obres didàctiques. Aquells docents interessats a proposar als seus alumnes situacions d'aquest tipus, riques en la utilització dels recursos de la geometria euclidiana, poden extreure material útil en el tercer capítol del *Llibre de geometria*, dedicat exclusivament al repartiment proporcional de terres.

— Vegeu un exemple en què es planteja la divisió d'un terreny entre tres hereus en parts no iguals (p. 101 i s.): «I si els copropietaris no tinguessin iguals les seves parts, sinó que un tingués 1/2, i el segon 1/3 part, i el tercer 1/6 part, i cada un d'ells volgués la seva part adjunta a un costat?». Desenvolupa a continuació el procediment que s'ha de seguir: «Mesurarem en el costat AB, que correspon al tenedor de la meitat, el seu terç o sigui BE, i unirem B amb el vèrtex C; dividirem CE en dues parts iguals en D i unirem D amb A i B, i tindrem el triangle ABC, dividit en tres parts: una part és igual a la meitat i és el triangle ADB; l'altra és el triangle ADC, que és igual al terç, i l'altra part és el triangle BDC, que és igual al sisè». Finalment, demostra l'exactitud de la partició portada a terme: «La demostració d'això es desprèn de les anteriors sobre particions, ja que és evident que el triangle CBE és igual al terç d'ABC, i que la meitat del primer, o sigui BDC, serà l'1/6; així mateix, CAE és igual a 2/3 d'ABC, i la meitat del primer, ADC, serà el terç d'ABC; sumant ACB i CDB ens resta el triangle ABD que és igual a la meitat» (figura 5).

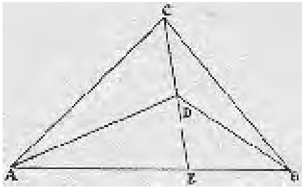

FIGURA 5. Construcció geomètrica.

Finalment, en el quart i últim capítol de l'obra, s'aborda d'una manera pràctica la determinació de les dimensions d'un terreny amb l'objecte de calcular, més tard i aplicant els mètodes ja tractats en el segon capítol, la seva àrea. L'agrimensor en l'obra d'Abraham bar Hiyya disposa per calcular les seves mesures de dos instruments: la «corda» (o cinta mètrica en versió escolar) i la «taula quadrada» (o cartabó). És a dir, només pot mesurar distàncies i construir angles rectes. La mesura d'angles queda exclosa expressament en tota l'obra perquè és, segons el seu autor, massa imprecisa la seva determinació.

— Resulta un repte didàctic per als alumnes proposar-los una situació semblant a algunes de les plantejades en l'obra. Per exemple, determinar l'àrea d'un triangle escalè amb només aquests dos instruments de mesura i sense poder acudir a la fórmula d'Heró, que si bé en el *Llibre de geometria* apareix (sense demostrar) en el segon capítol, el mateix autor aconsella no utilitzar-la per l'enfarfec que implica la determinació geomètrica d'arrels quadrades. Una vegada els alumnes hagin fet els seus intents, aquests poden comparar-se amb els mètodes descrits en l'obra, i comprovar-ne així l'adequació.

Per concloure, assenyalarem que la utilització en l'aula de matemàtiques de fragments del *Llibre de geometria* d'Abraham bar Hiyya ofereix aspectes concrets com a recurs didàctic que succintament hem apuntat. Pel que fa a l'obra en el seu conjunt ens permet introduir un enfocament culturalment globalitzador, perquè ens fa comprendre millor no només l'evolució de les matemàtiques i dels seus mètodes, sinó també la marxa de la nostra pròpia i complexa història.

Bibliografia

ASHTOR, E. (1984). *The Jews of Moslem Spain*. Vol. 3. Filadèlfia: Jewish Publication Society.

BAR-CHIJA, A. (1912). *Chibbur ha-Meschicha veha-Tischborelt: Lehrbuch der Geometrie* (Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von M. Guttmann). Berlín: Verein Mekize Nirdamim.

BAR-HIIA, A. (1931). *Llibre de geometria*: *Hibbur hamesxihà uehatixbòret* (Segons el text editat i prologat pel Dr. M. Guttmann. Versió de l'hebreu per J. Millàs i Vallicrosa). Barcelona: Alpha.

BENSCH, S. (2002). *Barcelona and its Rulers, 1096-1291*. Cambridge: Cambridge University Press.

GLICK, T. (1979). *Islamic and Christian Spain in the early Middle Ages*. Princeton: Princeton University Press.

LÉVY, T. (2001). «Les débuts de la littérature mathématique hébraïque: la géométrie d'Abraham bar Hiyya (XIe-XIIe s.)». *Micrologus*, vol. IX, p. 35-64.

MILLÀS I VALLICROSA, J. (1949). «La obra enciclopédica de R. Abraham bar Hiyya». A: *Estudios sobre historia de la ciencia española*. Barcelona: CSIC, p. 219-262.

SERVAT, J.; NÚÑEZ, J. M. (2000). «Resolució geomètrica de problemes aritmètics i algebraics amb el programa Cabri II». A: *Actes de les I Jornades d'Educació Matemàtica a Catalunya*. Barcelona: Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT), p. 332-333.